02/11/15

Πρόταση (7.17): Έστω f_n μια ακολουθία στο $F(A,\mathbb{R})$ με $f_n \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} f$ με $f \in F(A,\mathbb{R})$. Αν γ οριακό σημείο του A κ' $\lim_{x\to\gamma} f_n(x) \to c_n \in \mathbb{R}$ τότε $\exists \lim c_n$, $\lim_{x\to\gamma} f_n(x)$ και μάλιστα

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\gamma} f_n(x) = \lim_{x\to\gamma} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Απόδειξη: Αφού $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0) : \forall n \geq n_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in A$ (1).

Το γ είναι οριακό σημείο του A οπότε έστω $(x_\mu) \in A$ με $(x_\mu) \to \gamma$ και άρα από υποθ. $\lim f_n(x_\mu) = c_{n_0}$. Άρα $\forall n \geq n_0,\ \forall \mu, \lambda \in \mathbb{N}$: $|f(x_\mu) - f(x_\lambda)| \leq |f(x_\mu) - f_n(x_\mu)| +$
$+ |f_n(x_\mu) - f_n(x_\lambda)| + |f_n(x_\lambda) - f(x_\lambda)| \leq 2\varepsilon + |f_n(x_\mu) - f_n(x_\lambda)|$ (2)
$\exists \mu_0 \in \mathbb{N} : \mu \geq \mu_0, \lambda \geq \mu_0 \Rightarrow |f_n(x_\mu) - f_n(x_\lambda)| < \varepsilon \overset{(2)}{\Rightarrow} |f(x_\mu) - f(x_\lambda)| < 3\varepsilon$
άρα $\exists \lim f(x_\mu) \in \mathbb{R}$. Λόγω (1)

$$\left.|f_n(x_\mu) - f(x_\mu)| < \varepsilon \Rightarrow |c_n - \lim_\mu f(x_\mu)| \leq \varepsilon\right\} \Rightarrow$$

$|c_n - \lim f(x_\mu)| \leq \varepsilon$ (3).

Θεωρώ $y_\mu \to \gamma$. άρα $\exists \lim f(y_\mu)$, $d = \frac{1}{2}|\lim f(x_\mu) - \lim f(y_\mu)| \geq 0$

Έστω ότι $\lim f(x_\mu) \neq \lim f(y_\mu)$.

Θεωρώ ότι $\varepsilon < \min\{1, d\}$. Τότε $|\lim f(x_\mu) - \lim f(y_\mu)| \leq$
$\leq |c_{n_0} - \lim f(x_\mu)| + |c_{n_0} - \lim f(y_\mu)| \leq 2\varepsilon < 2d =$
$= |\lim f(x_\mu) - \lim f(y_\mu)|$ Άτοπο άρα $d = 0 \Rightarrow$
$\lim f(x_\mu) = \lim f(y_\mu)$

άρα $\exists \lim_{x\to\gamma} f(x) \in \mathbb{R}$.

Λόγω (3) $\Rightarrow \exists \lim c_n$ και μάλιστα $\boxed{\lim_{x\to\gamma} f(x) = \lim c_n}$

Πόρισμα: Έστω $a_{n\mu}$ ακολ. με 2 δείκτες, πρέπει $\exists \lim a_{n\mu}$ ομοιόμορφα προς μ. Αν $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists \lim_\mu a_{n\mu} = c_n$. Τότε:

$$\lim_\mu \lim_n a_{n\mu} = \lim_n \lim_\mu a_{n\mu}$$

(*) $\lim_\mu \lim_n a_{n\mu} = \lim_n \lim_\mu a_{n\mu}$

Πρόταση: Έστω $(a_{n\mu}) \subseteq \mathbb{R}$: $\forall n, \mu$: $a_{n\mu} \leq a_{(n+1)\mu}$

Αποδ: $\forall \mu \in \mathbb{N}$, $a_{n\mu}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι $\uparrow$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n\mu}$, $\mu \in \mathbb{N}$ είναι $\uparrow$

$b_\mu := \lim_n a_{n\mu}$, $c_n := \lim_\mu a_{n\mu}$

$a_n \leq a_{n(\mu+1)} \leq b_{\mu+1}$ $\uparrow$, $b := \lim b_\mu$ E στο $\mathbb{R}^*$

$c := \lim c_n$ E στο $\mathbb{R}^*$

$a_{n\mu} \leq b_\mu \leq b$, $\forall n, \mu \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$: $c_n \leq b$ και άρα $c \leq b$

όμοια $b \leq c \Rightarrow \boxed{b = c}$.

$F(A, \mathbb{R})$

$P_u(f, g) = \min\{1, \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|\}$

Είναι $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$

$f_n \to f \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\varepsilon \leq 1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. $\forall x \in A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\varepsilon \leq 1)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$: $\forall n \geq n_0$: $\boxed{P_u(f_n, f) \leq \varepsilon}$ δηλ

δηλ) $\lim P_u(f_n, f) = 0$

ΘΕΩΡΗΜΑ: $(F(A, \mathbb{R}), P_u)$ πλήρης!

Αποδ: Έστω (f_n) βασική ως προς την P_u.

Έστω $\varepsilon < 1$, $\varepsilon > 0$: (f_n) βασική $\Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}$: $\forall \mu, n \geq n_1$: $P_u(f_\mu, f_n) < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |f_\mu(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in A$.

$f(x) \in \mathbb{N}$, $f : A \to \mathbb{R}$

Ορισμός: $A\subseteq\mathbb{R}^n$ κ' $f\in F(A,\mathbb{R})$ και $\exists M\in\mathbb{R}$ με $M>0$. Τότε:
f φραγμένη $\Leftrightarrow$ $|f(x)|\le M, \forall x\in A$.

Αν $B(A,\mathbb{R})$ σύνολο φρ. συναρτήσεων. Αυτός είναι γρ. χώρος.

Πρόταση: $B(A,\mathbb{R})$ κλειστό.

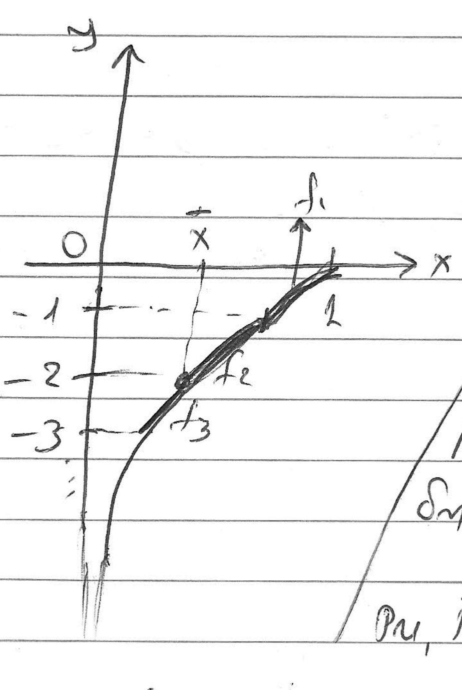
Απόδ: Έστω f_n του $B(A,\mathbb{R})$, $f_n\to f$, $f\in(F(A,\mathbb{R}),\rho_u)$
$\exists n_0$ τ.ω. $\rho_u(f_n,f)<\frac{1}{2} \Leftrightarrow |f_{n_0}(x)-f(x)|<\frac{1}{2}, \forall x\in A$ (1).
$\exists M>0 : |f_{n_0}(x)|\le M, \forall x\in A$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow$ $|f(x)| = |f_{n_0}(x)-f(x)-f_n(x)| \le |f_{n_0}(x)-f(x)| + |f_n(x)| < \frac{1}{2}+M \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f: φραγμένη $\Rightarrow f\in B(A,\mathbb{R})$

Κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης: αν f είναι το κατά σημείο όριο της f_n κ' f_n φραγμ. και f όχι φραγμ. $\Rightarrow$ η f_n **δεν** συγκλ. ομ.

Π.χ.: $f_n(x) := \max\{-n, \log x\}, x\in(0,1)$
$f_n(x)\to f(x)=\log x, x\in(0,1)$
$f(x)$ δεν είναι φρ. $\xRightarrow[\text{κριτ.}]{}$ $f_n \not\to_{\text{ομ.}}$



$f_n(\bar{x})=\log\bar{x}$

$\rho_u(f,g)=\min\{1, \sup|f(x)-g(x)|\}$

$f,g\in B(A,\mathbb{R})$
$\hat{\rho}_u(f,g) = \underbrace{\sup\{|f(x)-g(x)|\}, x\in A}_{\in\mathbb{R}\ (f,g\ \text{φρ.})}$
$\|f\| := \hat{\rho}_u(f,0)$ στάθμη στο $B(A,\mathbb{R})$
δηλ. $\|f\| := \sup_{x\in A}|f(x)|$,

$\rho_u, \hat{\rho}_u$ ισοδύναμες

Πόρισμα (8.6) : $\mathcal{O}(B(A,\mathbb{R}), \hat{\rho}_u)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.